**Universidad de Castilla-La Mancha**
Facultad de Ciencias del Medio Ambiente
Primero de Ciencias Ambientales
Fundamentos Matemáticos
Examen ordinario, 20-01-2010

**EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA**

1. (**1.5 puntos**) Calcular
$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt[2]{n^2-5n}\right)$$

2. Estudia qué deben cumplir los coeficientes $a$ y $b$ para que la función $f(x)$ definida como
$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x<1 \\ ax^2+b & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$
   (a) (**0.75 puntos**) sea continua en todo su dominio
   (b) (**0.75 puntos**) sea derivable en todo su dominio.

3. (**1.5 puntos**) Estudia y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ :
$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ 2x-y-z=0 \\ x-ky+3z=4 \end{cases}$$

4. (**1.75 puntos**) Una ventana está formada por un rectángulo que tiene adosado un semicírculo en su parte superior. Si el perímetro total de la ventana debe ser de 12 m, calcula las dimensiones que hacen que sea máxima la superficie de la misma.

5. (**2 puntos**) Se supone que la posición de una partícula en el plano, en el instante $t$, esta determinada por la posición en el instante $t-1$ según las ecuaciones
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t-1) \\ y(t-1) \end{pmatrix}.$$
   Si la posición inicial es $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$ tal que, $x(0)+y(0)=1$, estudiar la posición límite de la partícula al hacer $t\to+\infty$.

6. (**1.75 puntos**) Calcula el valor aproximado de $\cos(\pi/10)$ usando los cuatro primeros términos del desarrollo de McLaurin de la función $y=\cos(x)$.

**EXAMEN CON PARCIAL APTO**

Elige 4 ejercicios de los 5 propuestos

1. (**2.5 puntos**) Probar que $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ es una base en $\mathbb{R}^3$ y encontrar las coordenadas del vector $v = (1,2,-4)$ en dicha base. Hallar la matriz de cambio de base, de la base canónica a $B$.

2. Estudia qué deben cumplir los coeficientes $a$ y $b$ para que la función $f(x)$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   (a) (**1 punto**) sea continua en todo su dominio,

   (b) (**1.5 punto**) sea derivable en todo su dominio.

3. (**2.5 puntos**) El área encerrada por la función $y = \sin(x/3)$ , el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{3}{2}$ unidades de superficie. Calcula razonadamente el valor de $a$ teniendo en cuenta que $0 < a < \frac{3\pi}{2}$.

4. (**2.5 puntos**) Se supone que la posición de una partícula en el plano, en el instante $t$, esta determinada por la posición en el instante $t-1$ según las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-1) \\ y(t-1) \end{pmatrix}.$$

   Si la posición inicial es $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$ tal que, $x(0) + y(0) = 1$, estudiar la posición límite de la partícula al hacer $t \to +\infty$.

5. (**2.5 puntos**) Resuelve el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2y \\ y' &= x + 3y \end{aligned}$$

   Hallar su solución general y encontrar la solución particular bajo la condición inicial

$$(x(0), y(0)) = (2,3).$$

SOLUCIÓN EXAMEN DE TODA LA ASIGNATURA

1. Calcular

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt[2]{n^2-5n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\sqrt[2]{1-5/n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\sqrt[2]{1-5/n}\right)}{1/n}\end{aligned}$$

donde se observa $\infty/\infty$. empleamos l´Hôpital:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dn}\left(1-\sqrt[2]{1-\frac{5}{n}}\right) &= -\frac{5}{2n^2\sqrt{\frac{1}{n}\left(n-5\right)}}\\ \frac{d}{dn}\left(1/n\right) &= -\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{d}{dn}\left(1-\sqrt[2]{1-5/n}\right)}{\frac{d}{dn}\left(1/n\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{5}{2n^2\sqrt{\frac{1}{n}(n-5)}}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{2\sqrt{1-\frac{5}{n}}} = 5/2$$

Por ende, se puede aplicar la regla de l´Hôpital para concluir que el límite existe y vale $\frac{5}{2}$

2. Estudia qué deben cumplir los coeficientes $a$ y $b$ para que la función $f(x)$ definida como

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x\le 1\\ ax^2+b & \text{si } x>1\end{cases}$$

sea:

(a) $e^{\frac{1}{x-1}}$ es conitnua en la región $x<1$ pues es composición de funciones continuas. También los es $ax^2+b$ en $x>1$, cualquiera que sean $a$ y $b$. Para ver si hay continuidad en $x=1$ hemos de ver que

$$\lim_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+} f\left(x\right)$$

y que este límite es un valor finito. Por un lado

$$\lim_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

y que $\frac{1}{x-1}\to-\infty$ si $x\to1^-$; y por otro lado

$$\lim_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+}\left(ax^2+b\right)=a+b$$

Por tanto basta que $a$ y $b$ sean tales que $a+b=0$.

(b) En cuanto a la derivabilidad se procede exactamente igual, quedando por ver si es derivable en $x = 1$. Por un lado

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

si $x < 1$, y

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(ax^2 + b\right) = 2ax$$

si $x > 1$. Si queremos que haya derivavilidad en $x = 1$ ha de cumplirse que el valor

$$f'\left(1^-\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\right) = 0$$

debe coincidir con

$$f'\left(1^+\right) = \lim_{x\to 1^+} 2ax = 2a$$

Por ende $a = 0$ y como para que haya derivabilidad es necesario la continuidad, entonces $b = 0$.
Nótese que si hacemos el cambio $v = \frac{1}{x-1}$ entonces $v \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$ y que usando la regla de l'Hôpital el cálculo de $\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\right)$ se puede realizar como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\right) &= \lim_{v\to-\infty}\left(-v^2e^v\right) = \lim_{v\to-\infty}\left(\frac{-v^2}{e^{-v}}\right)\\ &= \lim_{v\to-\infty}\frac{-2v}{-e^{-v}} = \lim_{v\to-\infty}\frac{-2}{e^{-v}} = 0\end{aligned}$$

3. Estudia y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ :

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - ky + 3z = 4 \end{array}\right.$$

Las matrices de coeficientes $A$ y ampliada $\overline{A}$ son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -k & 3 \end{pmatrix}, \text{ y } \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 7k - 21$, $-21 + 7k = 0$ si y sólo si $k = 3$; por tanto, si $k$ no es 3 entonces por Rouché-Frobenius hay solución única.
Si $k = 3$ entonces la ampliada es de rango 2 y también lo es el rango de la de coeficientes Por ende, gracias a Rouché-Frobenius hay infinitas soluciones. Calculemos sus soluciones

Si $k \neq 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & -k-2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3+F_2\left(\frac{-(k+2)}{5}\right)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}(-k+3) & \frac{8}{5}(-k+3) \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\begin{aligned} z &= \frac{\frac{8}{5}(-k+3)}{\frac{7}{5}(-k+3)} = \frac{8}{7}, \\ y &= \frac{-1}{5}\left(8 - 7\left(\frac{8}{7}\right)\right) = 0, \\ x &= -4 + 4z - 2y = -4 + 4\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Si $k = 3$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4+\frac{14}{5} & -4+\frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+\frac{16}{5} \\ \frac{-8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4-\frac{14}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que como $\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4+\frac{14}{5} & -4+\frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\overline{A}) = 2$, pues es el número de peldaños que hay en la matriz escalonada.

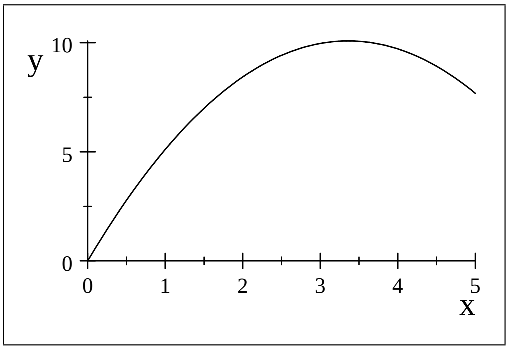
4. Una ventana está formada por un rectángulo que tiene adosado un semicírculo en su parte superior. Si el perímetro total de la ventana debe ser de 12 m, calcula las dimensiones que hacen que sea máxima la superficie de la misma.
   Si $a$ y $b$ son las dimensiones entonces el perímetro es $2a + \pi\frac{b}{2} + b$ y el área o superficie de la ventana sería
   $$S = ab + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Puesto que $2a + \pi\frac{b}{2} + b = 12$, se tiene

$$a = 6 - \frac{1}{2}\left(\pi\frac{b}{2} + b\right)$$

y llevado a $S$ da

$$S = \left(6 - \frac{1}{2}\left(\pi\frac{b}{2} + b\right)\right)b + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8}b\left(4b + \pi b - 48\right)$$




Derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{d}{db}S = \frac{d}{db}\left(-\frac{1}{8}b\left(4b + \pi b - 48\right)\right) = 6 - \frac{1}{4}\pi b - b = 0$$

lo que da como solución $b = \frac{24}{\pi+4}$. Se trata de un máximo absoluto pues se trata de una función cóncava $(S'' < 0)$. El valor máximo de superficie para la ventana se alcanza para $b = \frac{24}{\pi+4}$ y

$$a = 6 - \frac{1}{2}\left(\pi\frac{\frac{24}{\pi+4}}{2} + \frac{24}{\pi+4}\right) = \frac{12}{\pi+4},$$

y la superficie máxima obtenida es

$$S_{\max} = \left(\frac{12}{\pi+4}\right)\left(\frac{24}{\pi+4}\right) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\frac{24}{\pi+4}}{2}\right)^2 = \frac{72}{\pi+4}$$

5. (**2 puntos**) Se supone que la posición de una partícula en el plano, en el instante $t$, esta determinada por la posición en el instante $t-1$ según las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t-1) \\ y(t-1) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y sabemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \\
&\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ 1 - x(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El vector $l = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es el estado límite del sistema.

6. (**1.75 puntos**) Calcula el valor aproximado de $\cos(\pi/10)$ usando los cuatro primeros términos del desarrollo de McLaurin de la función $y = \cos(x)$.
   Sabemos que el desarrollo de orden cuatro en un entorno de cero de la fucnión $\cos(x)$ es

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^6\right)$$

   y por ende que

$$\cos(\pi/10) \approx 1 - \frac{1}{2}(\pi/10)^2 + \frac{1}{24}(\pi/10)^4 = 0.951\,06$$

   Se omiten los detalles.

SOLUCIÓN EXAMEN CON PARCIAL APTO

1. Probar que $B = \{(1,2,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ es una base en $\mathbb{R}^3$ y encontrar las coordenadas del vector $v = (1,2,-4)$ en dicha base. Hallar la matriz de cambio de base, de la base canónica a $B$.
   Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es suficiente verificar que éstos son l.i. para concluir que son base. Verificar que son l.i. se consigue usando el determinante formado por los tres vectores. Si es distitnto de cero son l.i., y si es cero son l.d. y Así es, como
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$
   entonces son l.i. y formarán base. Puesto que los vectores de $B$ vienen expresados en coordenadas con respecto a la base canónica entonces, éstos, dispuestos por columnas consitutirán la matriz de cambio de base pedida, que es
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   $(1,2,-4)$ es un vector que viene escrito conrespecto a la base canónica, sus coordenadas con respecto a la base $B$ son $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y estas coordenadas han de cumplir la relación de cambio de base
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
   Resolvemos por Gauss y queda que $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Estudia qué deben cumplir los coeficientes $a$ y $b$ para que la función $f(x)$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   (a) Es continua en $x < 1$pue es composición de funciones continuas e igual ocurre en $x > 1$, ya que se trata de un polinomio. Falta ver si hay continuidad en $x = 1$. Para ello vemos si
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$
   Ahora bien,
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} = 1$$
   y
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(ax^2 + b\right) = a + b$$
   Por tanto se ha de cumplir $a + b = 1$.

(b) Se ve claramente que $f$ es derivable en todos los puntos a excepción, probablemente de $x = 1$.Para que sea derivable en $x = 1$ se ha de cumplir que

$$f'\left(1^{-}\right) = f'\left(1^{+}\right)$$

Pero

$$f'\left(1^{-}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x-1}\right)\Big|_{x=1} = 1$$

y

$$f'\left(1^{+}\right) = \frac{d}{dx}\left(ax^2 + b\right)\Big|_{x=1} = 2a$$

Por ende ha de verificarse, que

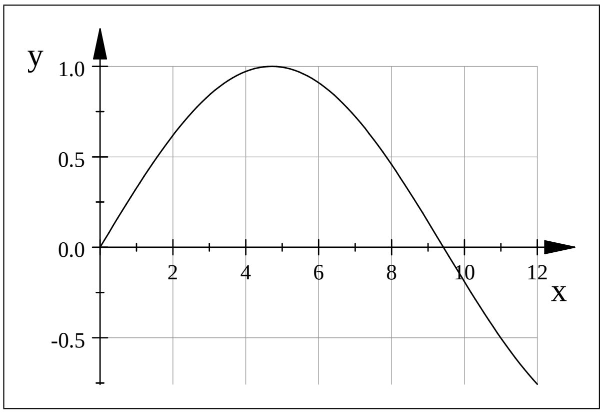
$$2a = 1$$

y también la condición de continuidad, i.e.

$$a + b = 1,$$

pues para que una fucnión sea derivable en un punto, previamente ha de ser continua en dicho punto. De estas dos ecuaciones se sigue que $a = 1/2$ y $b = 1/2$.

3. El área encerrada por la función $y = \sin(x/3)$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{3}{2}$ unidades de superficie. Calcula razonadamente el valor de $a$ teniendo en cuenta que $0 < a < \frac{3\pi}{2}$.




Dicho área se calcula mediante

$$A = \frac{3}{2} = \int_0^a \sin(x/3)\, dx = 3 - 3\cos\left(\frac{1}{3}a\right)$$

de donde se deduce que $\frac{1}{2} = 1\cos\left(\frac{a}{3}\right)$ , esto es, $a = \pi + 6\pi l$ donde $l \in \mathbb{Z}$, ó $a = -\pi + 6\pi l$ donde $l \in \mathbb{Z}$. Obviamente la única solución posible es $a = \pi$

4. Hecho en el ejercicio 5 del examen anterior

5. Resolvemos el sitema

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{array}\right. , (x(0), y(0)) = (2,3)$$

que escrito en forma compacta es

$$X' = AX$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos $A : D = C^{-1}AC$ ó $A = CDC^{-1}$ donde

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Así $X' = AX$ se transforma en

$$X' = CDC^{-1}X$$

que equivale a

$$C^{-1}X' = DC^{-1}X$$

esto es

$$Z' = DZ$$

siendo $Z' = C^{-1}X'$ y $Z = C^{-1}X$. Si $Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ entonces el sistema precedente es

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución general de éste es

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \exp t \\ C_2 \exp 4t \end{pmatrix}$$

De $Z = C^{-1}X$ se sigue que la solución general es

$$X = CZ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(t) \\ C_2 \exp(4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1e^t + C_2e^{4t} \\ C_1e^t + C_2e^{4t} \end{pmatrix}$$

Como además debe cumplirse la condición inical $(x(0), y(0)) = (2,3)$ entonces

$$\begin{aligned} 2 &= -2C_1 + C_2 \\ 3 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Se tiene que $C_2 = \frac{8}{3}, C_1 = \frac{1}{3}$, y la solución particular pedida es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$$